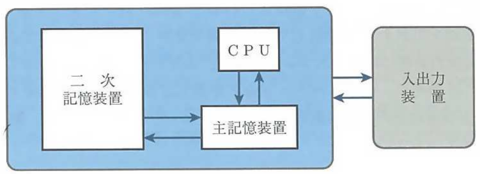
5 計算のモデル

5.1,5.2 コンピュータ・CPUの動作原理

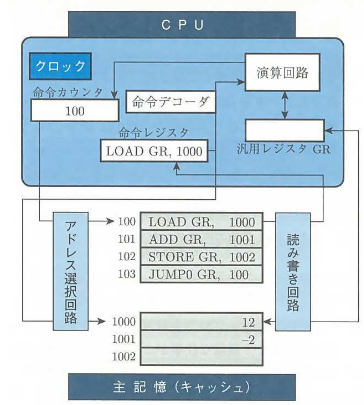
5.3 計算の数学的モデル

5.1,5.2 コンピュータ・CPUの動作原理



ストアードメモリ方式： プログラムもデータとして格納

- 機械語
- レジスタ

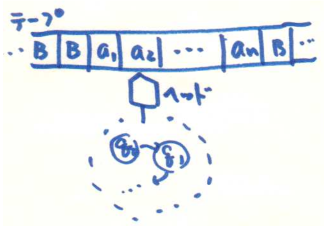


5.3 計算の数学的モデル

- チューリング機械
- レジスタ機械、
- λ計算、
- 項書換え系、
  などなど

5.3.1 チューリング機械

- 無限テープ
- テープの記号と状態から動作を(非決定的に)決める
- 動作は、次の状態·テープに書き込む記号·ヘッドの移動

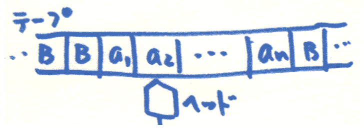


チューリング機械(TM)：

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$$

- Q: 状態の有限集合
- Σ: 入出力記号の有限集合
- Γ: テープ記号の有限集合 $(\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{B\})$
- δ: 遷移関数 $(\delta: \ Q \times \Gamma \to Q \times (\Gamma \cup \{L, R\}))$
- q_0: 初期状態 $(q_0 \in Q)$

時点表示： 状態がqでヘッドの位置が以下のとき、



$a_1 q a_2 \cdots a_n$

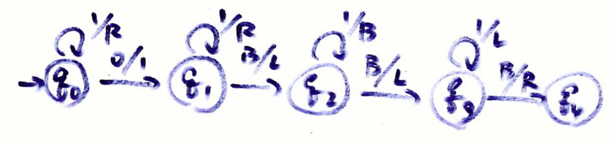
と書く

チューリング機械が定義する自然数上の計算：

$q_0 1^{k_1} 0 1^{k_2} 0 \cdots 0 1^{k_n} \vdash^* q 1^m$

は$f(k_1, \ldots, k_n) = m$

例： $f(x,y) = x + y$を満たす$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$を計算するチューリング機械



- 入力1011に対する動作
  $q_0 1011 \vdash 1 q_0 011 \vdash 1 q_1 111 \vdash 11 q_1 11 \vdash 111 q_1 1 \vdash 1111 q_1 \vdash 111 q_2 1 \vdash 111 q_2 \vdash 11 q_3 1 \vdash 1 q_3 11 \vdash q_3 111 \vdash q_3 B111 \vdash q_4 111$

5.3.2 帰納的関数

原始帰納的関数： 自然数$\mathbb{N}$上の関数のクラス

原始帰納的関数の定義

- 零関数、次者関数、射影関数
  zero: $\mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ ただし、**zero**() $\stackrel{\text{def}}{=} 0$
  suc: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ただし、**suc**$(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + 1$
  $\mathbf{p}_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ただし、$\mathbf{p}_i^n(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$
- 合成関数、すなわち、$g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$と$g_j : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$が原始帰納的関数のとき、
  $f(\vec{x}) = g(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$
  で定義される関数$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$は原始帰納的関数

原始帰納的関数の定義(続き)

- 原始帰納法で定義された関数、すなわち、
  $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$と$h : n^{n+2} \to \mathbb{N}$が原始帰納的関数のとき、
  $f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$
  $f(\vec{x}, y+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$
  で定義される関数$f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$は原始帰納的関数

原始帰納的関数の例

- **one**() $\stackrel{\text{def}}{=} 1$ なぜなら $1 =$ **suc**(**zero**())
- **two**() $\stackrel{\text{def}}{=} 2$ なぜなら $2 =$ **suc**(**one**())
- **pred**$(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \dot{-} 1$ なぜなら
  pred$(0) = 0$ (= **zero**())
  pred$(y+1) = y$ (= $\mathbf{p}_1^2(y, \mathbf{pred}(y))$)
- **add**$(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y$ なぜなら
  add$(x, 0) = x$ (= $\mathbf{p}_1^1(x)$)
  add$(x, y+1) =$ **suc**(**add**(x,y))
  (= **h**$(x, y, \mathbf{add}(x,y))$)

  ここで、**h**$(x,y,z) =$ **suc**$(\mathbf{p}_3^3(x,y,z))$は原始帰納的

原始帰納的関数の例(続き)

- $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \textbf{if } x >= y \\ 0 & \textbf{otherwise} \end{cases}$
  を計算する関数**sub**(x,y) なぜなら
  sub$(x, 0) = x$
  sub$(x, y+1) =$ **prod**(**sub**(x,y))
- $x \times y$を計算する関数**mult**(x,y) なぜなら
  mult$(x, 0) = 0$
  mult$(x, y+1) =$ **add**$(x, \mathbf{mult}(x,y))$

問： 関数**exp**$(x,y) = x^y$、**fact**$(x) = x!$、**min**(x,y)が原始帰納的であることを示せ。(ここで0^0の値は問わない)

補題： 原始帰納的関数 $f(\vec{x},y)$ を利用して次のように定義される $f'(\vec{x},y)$ と $f''(\vec{x},y)$ は原始帰納的関数である

$$f'(\vec{x},y) = \sum_{z<y} f(\vec{x},z) = f(\vec{x},0)+\cdots+f(\vec{x},y-1)$$
$$f''(\vec{x},y) = \prod_{z<y} f(\vec{x},z) = f(\vec{x},0)\times\cdots\times f(\vec{x},y-1)$$

証明： f' のみ示し、f'' は省略

$$f'(\vec{x},0) = 0$$
$$f'(\vec{x},y+1) = f'(\vec{x},y) + f(\vec{x},y)$$

定理 原始帰納的関数はチューリング機械で計算できる

略証： 原始帰納的関数の構成に関する帰納法

- **zero**$()$, **suc**$()$, $\mathbf{p}_i^n(x_1,\dots,x_n)$ はチューリング機械で計算できる
- 合成
  $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ と $g_j : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ を計算するチューリング機械があると仮定し、$g(g_1(\vec{x}),\dots,g_m(\vec{x}))$ はチューリング機械で計算できることを示す

略証 (続き)

- 原始帰納法
  $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ と $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ を計算するチューリング機械があると仮定し、以下で定義される f がチューリング機械で計算できることを示す

$$\begin{cases} f(\vec{x},0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x},y+1) = h(\vec{x},y,f(\vec{x},y)) \end{cases}$$

原始帰納的述語

- (n 変数) 述語: $p : \mathbb{N}^n \to \{真, 偽\}$
- 述語 p の特徴関数 $c_p : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

$$c_p(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad p(\vec{x}) = 真のとき \\ 1 & \cdots \quad p(\vec{x}) = 偽のとき \end{cases}$$

- 述語 p が原始帰納的 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ c_p が原始帰納的

例： 述語「=0」 (=0(x) を $x=0$ と書くことにする)

$$c_{=0}(x) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad x が 0 のとき \\ 1 & \cdots \quad x が 0 でないとき \end{cases}$$

$c_{=0}(x) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} x)$ と書けるので、$c_{=0}$ は原始帰納的関数である。よって「=0」は原始帰納的述語

例： 述語「$x=y$」、「$x \le y$」は原始帰納的。なぜなら、

$$c_{=}(x,y) = c_{=0}((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))$$
$$c_{\geq}(x,y) = c_{=0}(x \dot{-} y)$$

補題 $p(\vec{x})$, $q(\vec{x})$, $r(\vec{x},y)$ が原始帰納的述語なら、次の述語も原始帰納的

(1) $\neg p(\vec{x})$ **(2)** $p(\vec{x}) \vee q(\vec{x})$ **(3)** $p(\vec{x}) \wedge q(\vec{x})$
(4) $(\exists z < y)\, r(\vec{x},z)$ **(5)** $(\forall z < y)\, r(\vec{x},z)$
(6) $p(f_1(\vec{x}),\dots,f_n(\vec{x}))$ (ここで f_i は原始帰納的)

証明： **(3)**,**(5)** はそれぞれ **(2)**,**(4)** で表せる

(1) $c_{\neg p}(\vec{x}) = 1 \dot{-} c_p(\vec{x})$

(2) $c_{p \vee q}(\vec{x}) = c_p(\vec{x}) \times c_q(\vec{x})$

(4) 述語を $s(\vec{x},y)$ とかく。$c_s(\vec{x},y) = \prod_{z<y} c_r(\vec{x},z)$

(6) 述語を $p'(\vec{x})$ とかく。

$$c_{p'}(\vec{x}) = c_p(f_1(\vec{x}),\dots,f_n(\vec{x}))$$

例： 次の述語は原始帰納的

- $x < y$
- $x \times y = z$
- $\mathbf{prime}(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

  $(x > 1) \land (\neg(\exists u < x)(\exists v < x)\ (u \times v = x))$

$p(\vec{x}, y)$の限定最小解関数： y未満で$p(\vec{x}, z)$を満たす$z \in \mathbb{N}$があればその最小のzを返し、そうでなければyを返す関数

$$\mu_{z<y}\, p(\vec{x}, z) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{min}(\{z \in \mathbb{N} \mid z < y, p(\vec{x}, z)\} \cup \{y\})$$

補題 $p(\vec{x}, y)$が原始帰納的述語ならば、$\mu_{z<y}\, p(\vec{x}, z)$ は原始帰納的関数

証明： $(\exists z \leq v)\ p(\vec{x}, z)$の特徴関数 $\prod_{z \leq v} c_p(\vec{x}, z)$を$g(\vec{x}, v)$と書く。

i) $p(\vec{x}, z)$を満たす最小のzが$m\ (< y)$のとき

v	0	1	$\cdots$	$m-1$	m	$m+1$	$\cdots$	$y-1$
$c_p(\vec{x}, v)$	1	1	$\cdots$	1	0	$*$	$\cdots$	$*$
$g(\vec{x}, v)$	1	1	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0

ここで$*$は0または1

よって、 $\sum_{v<y} g(\vec{x}, v) = m$

ii) y未満では$p(\vec{x}, z)$を満たすzがないとき

v	0	1	$\cdots$	$y-1$
$c_p(\vec{x}, v)$	1	1	$\cdots$	1
$g(\vec{x}, v)$	1	1	$\cdots$	1

よって、 $\sum_{v<y} g(\vec{x}, v) = y$

例：

- $x \div y$は原始帰納的。なぜなら

  $x \div y = \mu_{z<x}(x < (y \times (z+1)))$
- $\mathbf{pr}(x) \overset{\text{def}}{=} x$番目の素数

  (例：$\mathbf{pr}(0) = 2$, $\mathbf{pr}(1) = 3$)

  は原始帰納的。なぜなら

  $\mathbf{pr}(0) = 2$
  $\mathbf{pr}(x+1) =$
  $\mu_{z<\mathbf{pr}(x)!+2}((\mathbf{pr}(x) < z) \land \mathbf{prime}(z))$

帰納的関数

- 原始帰納的でない関数f_Mを計算するチューリング機械Mが存在

  ∵ (原始帰納的帰納関数は全域的だが、f_Mは一般には部分関数)
- 帰納的関数のクラスは、チューリング機械で計算できる関数のクラスと一致する
- 部分関数fとgは以下を満たすとき等価である($f = g$)という
  - 同一の引数を与えたとき、一方が未定義なら他方も未定義であり、そうでなければ結果が一致する

帰納的関数の定義

- 原始帰納的関数
- 合成関数 (帰納的関数の合成)
- 原始帰納法 (帰納的関数を用いた原始帰納法)
- 原始帰納的述語の最小解関数

述語pの最小解関数：

$$\mu_z\, p(\vec{x}, z) = \begin{cases} z & \cdots\ p(\vec{x}, y)\text{を満たす}z \in \mathbb{N}\text{が存在するとき} \\ \text{未定義} & \cdots\ \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

帰納的関数の例： $f(x) = \mu_z(z^2 = x)$

x	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$f(x)$	0	1	未	未	2	未	$\cdots$

5.3.3 計算モデルの同等性

定理 帰納的関数はチューリング機械で計算できる

証明： 帰納的関数の構成に関する帰納法

- **14**ページの定理**[**原始帰納的関数は**TM**で計算できる**]**
- 原始的述語pの最小解関数$\mu_z\ p(\vec{x}, z)$がチューリング機械で計算できることを示す
- 上の定理の逆も成立する

アッカーマン関数： 帰納的だが原始帰納的でない関数

$$\mathbf{A}(0, y) = y + 1$$
$$\mathbf{A}(x + 1, 0) = \mathbf{A}(x, 1)$$
$$\mathbf{A}(x + 1, y + 1) = \mathbf{A}(x, \mathbf{A}(x + 1, y))$$

問**5.5 (text p.141)** 急激に大きくなる関数で、限定最小解関数では書けない