4 集合と論理

4.1 集合の濃度

4.2 ブール代数

4.3 論理関数

4.1 集合の濃度

集合Aの濃度：

$$|A| = \begin{cases} \text{要素の数} & \cdots\ \textbf{if}\ A\text{は有限集合} \\ \text{加算無限} & \cdots\ \textbf{if}\ A\text{は自然数と対応がつく} \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

- 以下の集合は加算無限か？

自然数:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	$\cdots$
偶数 :	0,	2,	4,	6,	8,	10,	12,	$\cdots$
奇数 :	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	$\cdots$
素数 :	2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	$\cdots$
整数 :								
実数 :								
有理数:								

濃度の比較

- $A =_C B$**:** 全単射**(1対1かつ上への写像)**$f : A \to B$ が存在
- $A \leq_C B$**:** 単射**(1対1写像)**$f : A \to B$が存在
- $A <_C B$**:** $A \leq_C B$かつ$A \neq_C B$
- 有限集合 $<_C$ 加算無限集合

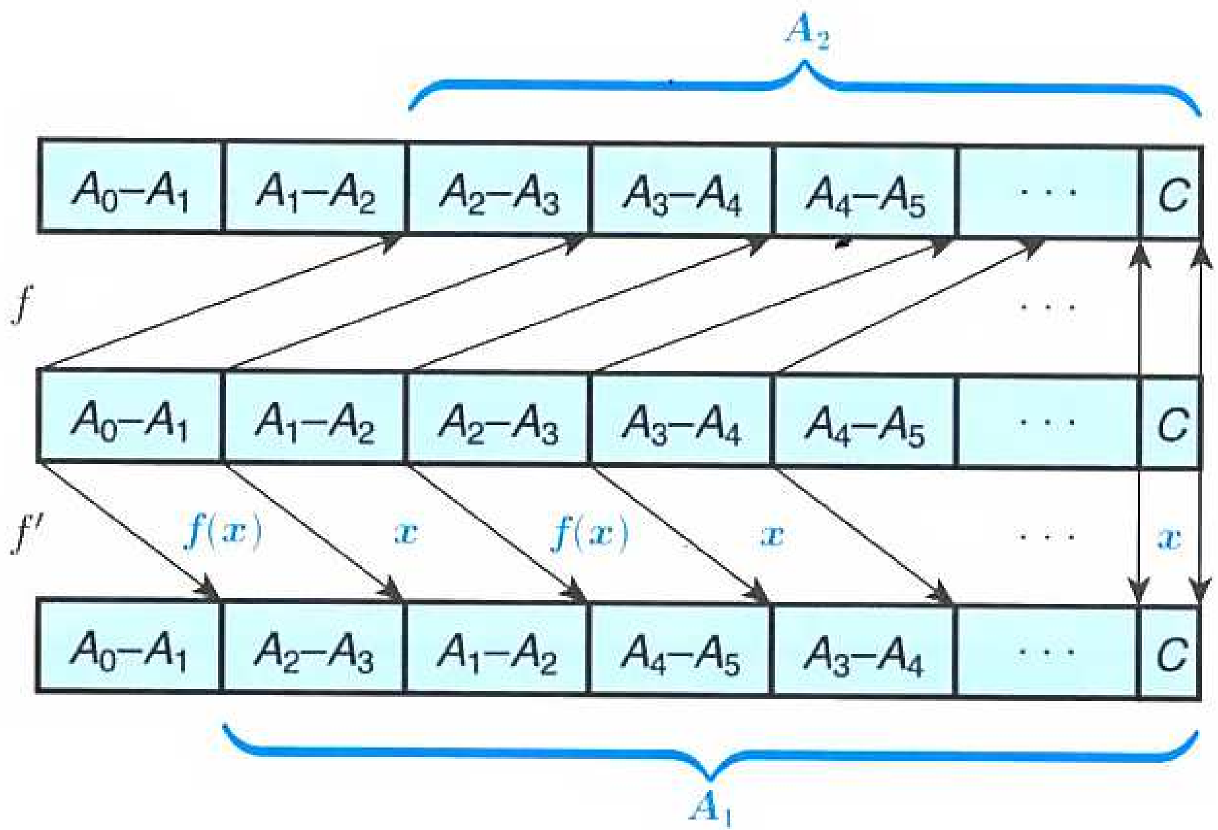
問**4.2** 濃度の等しさ$=_C$が同値関係であることを示せ

補題4.1： $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2$ かつ $A_0 =_C A_2$ ならば、

$A_0 =_C A_1$

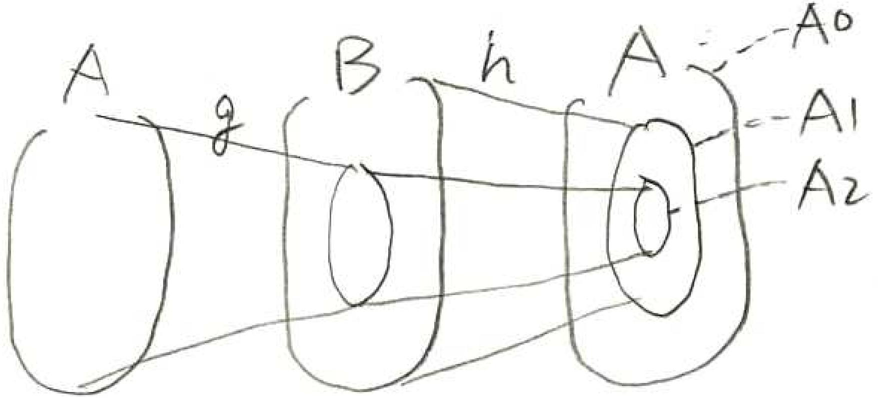
証明： $A_0 =_C A_2$ より全単射 $f : A_0 \to A_2$ が存在

- f から以下のように全単射 $f' : A_0 \to A_1$ が定義できる



定理**4.1**： $A =_C B \iff A \leq_C B \land B \leq_C A$

証明： 単射$g : A \to B$, $h : B \to A$が存在し



- $g \circ h : A \to A_2$は全単射なので$A =_C A_2$
- 補題**4.1**より$A =_C A_1$
- ここで、$h : B \to A_1$も全単射なので$B =_C A_1$
- よって問**4.2**より、$A =_C B$

問4.4： $\leq_C$が反射律と推移律を満たすことを示せ

定理4.2： 任意の$A \subseteq \mathbb{N}$に対して、

$$|A| \notin \mathbb{N} \iff A =_C \mathbb{N}$$

証明： **(⇐)** 明らか（全単射$f : \mathbb{N} \to A$を考えよ）

(⇒) $A \notin \mathbb{N}$とする。$A \subseteq \mathbb{N}$より、Aの要素は小さい順に並べることができるため$A =_C \mathbb{N}$

問4.5： 任意の$A \subseteq \mathbb{N}$に対して、

$$|A| \notin \mathbb{N} \iff \exists B(\subset A)\ B =_C A$$

略解 (⇒) 定理**4.2**より$A =_C \mathbb{N}$、全単射$f : A \to \mathbb{N}$ 有。

$A - f(0)$でBを定めると、$g(x) = f(x+1)$は全単射

(⇐) $|A| \in \mathbb{N}$とすると、$B(\subset A)$について$|B| < |A|$

加算無限より大きい濃度の集合

(注) $2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$ **(**教科書**p.18**の定義**)**

定理**4.3：** 任意の集合Aに対して、$A <_C 2^A$

証明**：**

($A \leq_C 2^A$**)** $f(x) = \{x\}$で定まる$f : A \to 2^A$は単射

($A \neq_C 2^A$**)** $f : A \to 2^A$が全**(**単**)**射と仮定する

- $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \subseteq A$とおく
  すなわち、どんな$a \in A$にも、$a \in B \iff a \notin f(a)$
- $f(a) = B$を満たす$a \in A$は存在しない。なぜなら、$a \in f(a)$なら$a \notin B$。また、$a \notin f(a)$なら$a \in B$
- よって、fが全射であることに矛盾

問4.6： $A =_C B$ならば$2^A =_C 2^B$であることを示せ

略解　全単射$f : A \to B$から以下のように定まる$g : 2^A \to 2^B$が全単射であることを示せばよい

$$g(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$$

例　$\mathbb{N} =_C \mathbb{Z} =_C \mathbb{Q} <_C \mathbb{R} =_C 2^{\mathbb{N}}$

教科書**p.114**から**p.117**を参照

定理**4.5,**系**4.5.2：** $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =_C \mathbb{N}$**,** $\mathbb{Q} = \mathbb{N}$

定理**4.6：** $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$と書くとき、$\mathbb{N}^* =_C \mathbb{N}$

証明**：** $\mathbb{N}^*$を$G_0, G_1, \ldots$にグループ分けできる

$$G_m = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^* \mid m = a_1 + \cdots + a_n\}$$

各G_mは有限集合なので、$\mathbb{N}^*$の要素を$G_0, G_1, \ldots$の順に並べられる

定理**4.7**： $\mathbb{R} =_C 2^{\mathbb{N}}$

証明： 系**4.5.2**、問**4.6**より$2^{\mathbb{N}} =_C 2^{\mathbb{Q}}$

($\mathbb{R} \leq_C 2^{\mathbb{Q}}$)： $H : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{Q}}$を以下のように定める

$$H(\alpha) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \alpha\}$$

二つの実数の間には必ず有理数が存在するので、Hは単射

($2^{\mathbb{N}} \leq_C \mathbb{R}$)： $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$を以下のように定める

$$h(A) = \sum_{n \in A} 3^{-n}$$

問**4.9**よりhは単射

問4.9： $h(A) = \sum_{n \in A} 3^{-n}$で定まる$h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$が単射であることを示せ

略解： $A \neq A'$とする。一方にだけ含まれる要素の最小をkとし、$k \in A, k \notin A'$とする

$$
\begin{aligned}
& h(A) - h(A') \\
& > 1/3^k - (1/3^{k+1} + 1/3^{k+2} + \cdots) \\
& > 1/3^k - 1/(2 \cdot 3^k) \\
& > 0
\end{aligned}
$$

よって、$h(A) \neq h(A')$

4.2 ブール代数

代数： 集合とその上のいくつかの演算

ブール代数： 以下の公理を満たす代数$\langle A, \{0, 1, \vee, \wedge, \neg\}\rangle$

冪等則 $x \wedge x = x \vee x = x$

交換則 $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$

結合則 $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

吸収則 $(x \wedge y) \vee x = x$, $(x \vee y) \wedge x = x$

分配則 $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,
$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

補元 $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 0$

4.3 論理関数

論理関数： ブール領域$\mathbb{B} = \{0, 1\}$上の関数

次の定理から、どの$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$も、関数$\wedge, \vee, \neg$の合成で表せることが分かる

定理**4.9**： シャノンの展開定理

任意の$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$に対して以下が成り立つ

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
&= (f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \wedge \neg x_n) \\
&\qquad \vee (f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \wedge x_n)
\end{aligned}
$$

証明： $x_n = 0$と$x_n = 1$で場合分けすれば示せる

定理4.10： 和積標準系 (DNF)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(a_1,\ldots,a_n)=1} \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

ここで、$x_i^1 = x_i$, $x_i^0 = \neg x_i$

例： 右の表で与えられる論理

関数 f の**DNF**は、

$(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

定理4.10'： 積和標準系 (CNF)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{f(a_1,\ldots,a_n)=0} \bigvee_{i=1}^{n} x_i^{\neg a_i}$$

ここで、$x_i^1 = x_i$, $x_i^0 = \neg x_i$

例： 右の表で与えられる論理

関数fのCNFは、

$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- CNFサイズの爆発

問4.18： $\vee$と$\neg$で任意の論理関数を表せることを示せ

解： $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$より明らか

fが充足可能： $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$を満たす$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{B}$が存在する

Teistin変換： 新しい変数を導入するが、充足可能性を保存したまま**CNF**に変換する変換。

各関数$f \in \{\wedge, \vee, \neg, \ldots\}$に対して、

$$\begin{cases} T(x) = \langle x, 1 \rangle & x\text{が変数、}\mathbf{0}\text{、}\mathbf{1}\text{のいずれかのとき} \\ T(f(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = \langle z, \delta \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \rangle \end{cases}$$

ここで、zは新しい変数、$T(\phi_i) = \langle y_i, \psi_i \rangle$,

δは$(z \Leftrightarrow f(y_1, \ldots, y_n))$と等価な**CNF**

補題： $T(\phi) = \langle z, \psi \rangle$とするとき、$\psi$は**CNF**

Teistin変換の例： $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4)$を**Teistin**変換する

$$T(x_1 \wedge x_2)$$
$$= \langle z_1, (\neg z_1 \vee x_1) \wedge (\neg z_1 \vee x_2) \wedge (z_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \rangle$$

$$T(x_3 \wedge x_4)$$
$$= \langle z_2, (\neg z_2 \vee x_3) \wedge (\neg z_2 \vee x_4) \wedge (z_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \rangle$$

$$T(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4))$$
$$= \langle z, (\neg z \vee z_1 \vee z_2) \wedge (z \vee z_1) \wedge (z \vee z_3) \wedge \cdots \rangle$$

ϕとψは充足可能性が等価： $\phi = 1$とする変数の割当に対して、それにψだけに現れる変数を追加して定めることで$\psi = 1$とできる。また逆も可能

定理： $T(\phi) = \langle z, \psi \rangle$ に対して、ϕ と $z \wedge \psi$ は充足可能性が等価

略証： ϕ の構造に関する帰納法。

- $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ のとき、
  - $\phi = 1$ とすると、$\phi_i = 1$ と帰納法の仮定 **(IH)** より $y_i = \psi_i = 1$。$z = 1$ ととれば、$\delta = (z \Leftrightarrow y_1 \wedge y_2) = 1$。よって、$z \wedge \phi = 1$
  - $z \wedge \phi = 1$ とすると、$\delta = 1$ より $y_1 = y_2 = 1$。また、$\psi_1 = \psi_2 = 1$ と **IH** より $\phi_1 = \phi_2 = 1$。よって、$\phi = 1$。
- その他の場合も同様