

3.5 2項関係

関係 : $R(\subseteq A \times A)$ を **A上の2項関係** という

- 例: $\{a, b, c\}$ 上の2項関係 $R = \{(a, b), (b, c)\}$ 。

逆関係 : R の **逆関係** $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$

合成 : A 上の関係 R, R' に対して、

- $R \circ R' = \{(x, z) \mid \exists y \in A (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R'\}$
- $R^0 = \{(x, x) \mid x \in A\}$, $R^{n+1} = R^n \circ R$ ($n \geq 0$)
- $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$, $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$

例 : 上の R に対して $R^* = R \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$

記法： $(x, y) \in R$ であることを、 xRy とも書く

関係の性質

- 反射律： $\forall x \in A \ xRx$ ($R^0 \subseteq R$ とも表せる)
- 推移律： $\forall x, y, z \in A \ xRy \wedge yRz \implies xRz$
- 対称律： $\forall x, y \in A \ xRy \iff yRx$
- 反対称律： $\forall x, y \in A \ xRy \wedge yRx \implies x = y$

R' は R の **P 閉包** : R' は、 $R \subseteq R'$ かつ **P** を満たす最小の
関係

- 例: R^+ は、 R の推移的閉包

R^* は、 R の反射的推移的閉包

3.6 順序関係と同値関係

3.6.1 順序関係

順序 : 反射律、推移律、反対称律を満たす関係

- 例: \mathbb{N} 上の順序 \leq ,
 2^A 上の順序 \subseteq (集合の包含)

全順序 : $\forall x, y \in A \ xRy \vee yRx$ を満たす順序 R

- 例: $\leq \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は全順序だが, $\subseteq \in 2^A \times 2^A$ は (一般に) 全順序でない

3.6.2 同値関係

同値関係 : 対称律、反射律、推移律を満たす関係

- 例 $A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 $R = \{(a, b), (b, c)\}$ に対して、

$$\sim = (R \cup R^{-1})^* \text{ は同値関係}$$

$x \in A$ の **同値類** : $[x]_{\sim} = \{y \mid x \sim y\}$

- 例 $[a]_{\sim} = [b]_{\sim} = [c]_{\sim} = \{a, b, c\}$, $[d]_{\sim} = \{d\}$

\sim による A の **同値分割** : $A/\sim = \{[x]_{\sim} \mid x \in A\}$

- 例 $A/\sim = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$