

問 6.7 以下のように a_n を求めるのに必要な加算回数 $t(n)$ を漸化式で表し、その一般項を求めよ。

$$a_n = \begin{cases} 0 & \cdots n = 0 \\ 1 & \cdots n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots n \geq 2 \end{cases}$$

略解 $t(n)$ は以下のようになる。

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \cdots n \in \{0, 1\} \\ t(n-1) + t(n-2) + 1 & \cdots n \geq 2 \end{cases}$$

次に、 $t(n) = a_{n+1} - 1$ ($n \geq 0$) と予想し、これを n に関する帰納法で示す。

- (a) $n \in \{0, 1\}$ のとき、明らか。
- (b) $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} t(n) &= t(n-1) + t(n-2) + 1 \\ &= (a_n - 1) + (a_{n-1} - 1) + 1 \quad \text{by I.H.} \\ &= a_n + a_{n-1} - 1 \\ &= a_{n+1} - 1 \end{aligned}$$

よって一般項は、

$$t(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\} - 1$$