

問 関数 $\exp(x, y) = x^y$ 、 $\text{fact}(x) = x!$ 、 $\min(x, y)$ が原始帰納的であることを示せ。

略解 \exp :

$$\begin{aligned}\exp(x, 0) &= g(x) \\ \exp(x, y + 1) &= h(x, y, \exp(x, y))\end{aligned}$$

ここで、 g, h を以下のように取る。

$$\begin{aligned}g(x) &= \text{one}() \\ h(x, y, z) &= \text{mult}(p_1^3(x, y, z), p_3^3(x, y, z)) (= \text{mult}(x, z))\end{aligned}$$

fact :

$$\begin{aligned}\text{fact}(0) &= \text{one}() \\ \text{fact}(y + 1) &= h(y, \text{fact}(y))\end{aligned}$$

ここで、 h を以下のように取る。

$$\begin{aligned}i(y, z) &= \text{suc}(p_1^2(y, z)) (= \text{suc}(y)) \\ h(y, z) &= \text{mult}(i(y, z), p_2^2(y, z)) (= \text{mult}(\text{suc}(y), z))\end{aligned}$$

\min : 以下のように定義すればよい。

$$\min(x, y) = \text{sub}(p_1^2(x, y), \text{sub}(x, y)) (= x \dot{-} (x \dot{-} y))$$