計算論基礎特論　レポート2解答例　　　　　　　　　　2015.6.15 出題分

問 4.6　$A =_C B$ ならば $2^A =_C 2^B$ であることを示せ

解答例　全単射 $f : A \to B$ から以下のように定まる $g : 2^A \to 2^B$ が全単射であることを示せばよい

$g(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$

全射：$Y \in 2^B$ すなわち、$Y \subseteq B$ とする。f は全射であるから、各 $b \in B$ について、$f(a) = b$ を満たす $a \in A$ が存在する。したがって、$X = \{a \mid f(a) = b\}$ ととれば、$g(X) = Y$ を満たす。

単射：$g(X) = g(X')$ とすると、f の単射性から $X = X'$ が導かれる。

問　次の定理の証明を完成させよ

定理: $T(\phi) = \langle z, \psi \rangle$ に対して、ϕ と $z \wedge \psi$ は充足可能性が等価

証明例　変数への $\mathbb{B}$ の要素の割当に対して、まだ割り当てられていない変数のいくつかに $\mathbb{B}$ の要素をさらに定める割当を、元の割当の拡張という。割当 α による式 ϕ の値を $\alpha(\phi)$ と書く。

命題1「変数割当 α について $\alpha(\phi) = b (\in \mathbb{B})$ であるとき、$\alpha'(z) = b$ かつ $\alpha'(\psi) = 1$ なる α の拡張割当 α' が存在する」を、ϕ の構造に関する帰納法により証明する。

(a) ϕ が変数または定数のときは $T(x) = \langle x, 1 \rangle$ より明らか。

(b) $\phi = g(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ のとき、$T(g(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = \langle z, \delta \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \rangle$ ここで、z は (α で割り当てられない) 新しい変数、$T(\phi_i) = \langle y_i, \psi_i \rangle$, δ は $(z \Leftrightarrow g(y_1, \ldots, y_n))$ と等価な CNF である。

$\alpha(\phi) = b$ のとき、各 i について $\alpha(\phi_i) = b_i$ かつ $\alpha(g(b_1, \ldots, b_n)) = b$ となる b_i が存在する。帰納法の仮定より $\alpha_i(y_i) = b_i$ かつ $\alpha_i(\psi_i) = 1$ を満たす α の拡張割当 α_i が存在する。ここで各 ψ_i の拡張の際に導入される変数は全て異なるため α_1 から α_n を全て包含し、かつ、$\alpha'(z) = b$ とする割当 α' を定めることができる。このとき、α' は $\alpha'(\delta) = \alpha'(z \Leftrightarrow g(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = 1$。よって、$\alpha'(z) = b$ かつ $\alpha'(\phi) = \alpha'(\delta \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) = 1$

命題2「変数割当 α, $b \in \mathbb{B}$ について、($\alpha(z) = b$ かつ $\alpha(\psi) = 1$) ならば $\alpha(\phi) = b$」を、ϕ の構造に関する帰納法により証明する。

(a) ϕ が変数、定数のときは $T(x) = \langle x, 1 \rangle$ より明らか。

(b) $\phi = g(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ のとき、$T(g(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = \langle z, \delta \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \rangle$ ここで、$T(\phi_i) = \langle y_i, \psi_i \rangle$、$\delta$ は $(z \Leftrightarrow g(y_1, \ldots, y_n))$ と等価な CNF である。

変数割当 $\alpha(z) = b$ かつ $\alpha(\psi) = 1$ のとき、各 i について $\alpha(\psi_i) = 1$ かつ $\alpha(g(y_1, \ldots, y_n)) = \alpha(z)$ である。$\alpha(y_i) = b_i$ とすると、帰納法の仮定より $\alpha(\phi_i) = b_i$ を満たす。$\alpha(\delta) = \alpha(z \Leftrightarrow g(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = 1$。よって、$\alpha(\phi) = b$

これらの命題から、定理は以下のように証明される。

ϕ が充足可能であるとき、$\alpha(\phi) = 1$ とする割当 α が存在する。命題1より $\alpha'(z \wedge \psi) = 1$ なる割当 α' が存在する。

$z \wedge \psi$ が充足可能であるとき、$\alpha(z \wedge \psi) = 1$ とする割当 α が存在する。命題2より $\alpha(\phi) = 1$ である。